CONCURSO ITA 2025

EDITAL: 01/ITA/2025

CARGO: PROFESSOR

PERFIL: MS-01

CADERNO DE QUESTÕES

1. Esta prova tem duração de **4 (quatro) horas**.
2. Você poderá usar **apenas** caneta esferográfica de corpo transparente com tinta preta, lápis ou lapiseira, borracha, régua transparente simples e compasso. **É proibido portar qualquer outro material escolar ou equipamento eletrônico**.
3. Você recebeu este **caderno de questões e um caderno de respostas** que deverão ser devolvidos ao final do exame.
4. O caderno de questões é composto por 5 **questões dissertativas**.
5. As **questões dissertativas devem ser respondidas exclusivamente no caderno de respostas**. Responda sequencialmente as questões, usando caneta preta.
6. **É obrigatória a devolução do caderno de questões e do caderno de respostas**, sob pena de desclassificação do candidato.
7. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar**.

Questão 1. [1,5 ponto]
Seja $T : V \to V$ um operador linear e seja $n \in \mathbb{N}^*$. Mostre que se $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é um conjunto de autovetores de T associados a autovalores distintos, então $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são linearmente independentes.

Questão 2. [1,5 ponto]
Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$?

b) Seja S o espaço gerado pelas potências de A (isto é, $S = [I, A, A^2, A^3, \cdots]$). Determine a dimensão de S.

Questão 3. [1,5 ponto]
Considere $\alpha, T \in \mathbb{R}$, com $\alpha \neq 0$ e $T > 0$, e considere o problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T. \\ u(x,0) = \sin(\pi x), \qquad 0 \leq x \leq 1. \\ u(0,t) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T. \\ u(1,t) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

a) Monte o esquema de discretização de Crank-Nicholson para obter sua solução aproximada. Apresente-o na forma matricial, considerando que o intervalo $0 \leq x \leq 1$ foi dividido em $N+1$ pontos, no $(m+1)$-ésimo intervalo de tempo.

b) Analise a estabilidade do método de Crank-Nicholson de acordo com o critério de von Neumann.

Questão 4. [2 pontos]
Considere a equação de Poisson em duas varáveis reais munida de condição de Dirichlet em $Q = [0,1]^2$.

a) Usando diferenças finitas com diferenças centradas e uma malha equidividida, obtenha o sistema linear correspondente $Ax = b$. Quais os coeficientes associados ao *stencil* de A?

b) Foi recomendado na literatura considerar, no lugar da matriz A, a matriz $\alpha I + A$, onde I denota a matriz identidade de mesma dimensão que A e $\alpha > 0$. Justifique detalhadamente o objetivo dessa recomendação.

c) Como você determinaria o valor de α a ser usado? Como determinar a solução do problema original a partir desse novo problema?

Questão 5. [3,5 pontos]

Definimos um método de Runge-Kutta (RK) explícito com R estágios de forma genérica como

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0) \\ y_{k+1} &= y_k + h\Phi(t_k, y_k, h)\,, \end{cases}$$

onde

$$\Phi(t, y, h) = \sum_{r=1}^{R} c_r \kappa_r(t, y, h), \tag{1}$$

com as funções κ_r calculadas por intermédio de avaliações de f, dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_1(t, y, h) &\doteq f(t, y) \\ \kappa_2(t, y, h) &\doteq f(t + ha_2, y + hb_{21}\kappa_1) \\ \kappa_3(t, y, h) &\doteq f(t + ha_3, y + hb_{31}\kappa_1 + hb_{32}\kappa_2) \\ &\vdots \\ \kappa_r(t, y, h) &\doteq f\left(t + ha_r, y + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}\kappa_s\right), \quad 2 \leq r \leq R, \end{aligned} \tag{2}$$

onde os parâmetros a_r, b_{rs} e c_r, $2 \leq r \leq R$ e $1 \leq s \leq R-1$ são constantes reais. Considerando apenas aqueles métodos RK que têm dois estágios ($R = 2$) e parâmetros não negativos, perguntam-se:

a) Para quais escolhas desses parâmetros o método resultante não é *consistente com a equação diferencial*?

b) Para quais escolhas desses parâmetros o método resultante tem o *erro de discretização local* com a maior ordem possível? Apresente duas escolhas que resultem em métodos comumente encontrados na literatura.

c) Para a maior ordem que se pode obter, discuta a possibilidade de se minimizar o coeficiente do erro de discretização local como função desses parâmetros.

d) Para quais escolhas desses parâmetros ele tem *erro de discretização global de primeira ordem*?

e) Nesse caso, como o *intervalo de estabilidade absoluta* depende desses parâmetros?

Justifique detalhadamente suas respostas, embasando-as em fundamentos de análise numérica, sempre citando os teoremas em uso.

EM BRANCO – FOLHA DE RASCUNHO

EM BRANCO – FOLHA DE RASCUNHO

EM BRANCO – FOLHA DE RASCUNHO

EM BRANCO – FOLHA DE RASCUNHO

EM BRANCO – FOLHA DE RASCUNHO

EM BRANCO – FOLHA DE RASCUNHO

EM BRANCO – FOLHA DE RASCUNHO