



CONCURSO ITA 2025

EDITAL: 02/ITA/2025

CARGO: PROFESSOR

PERFIL: MS-02

CADERNO DE QUESTÕES

1. Esta prova tem duração de **4 (quatro) horas**.
2. Você poderá usar **apenas** caneta esferográfica de corpo transparente com tinta preta, lápis ou lapiseira, borracha, régua transparente simples e compasso. **É proibido portar qualquer outro material escolar ou equipamento eletrônico.**
3. Você recebeu este **caderno de questões e um caderno de respostas** que deverão ser devolvidos ao final do exame.
4. O caderno de questões é composto por **7 (sete) questões dissertativas**.
5. As **questões dissertativas devem ser respondidas exclusivamente no caderno de respostas**. Responda sequencialmente as questões, usando caneta preta.
6. **É obrigatória a devolução do caderno de questões e do caderno de respostas**, sob pena de desclassificação do candidato.
7. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar.**

Questão 1.

- a) Explique o método de mínimos quadrados e apresente as justificativas.
- b) Encontre todas as soluções de mínimos quadrados do sistema

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = 3, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$$

Questão 2. Seja V um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita e T um operador linear autoadjunto sobre V . Suponha que $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazem $a^2 < 3b$. Mostre que é invertível o operador S definido por

$$S = T^2 + aT + bI.$$

Questão 3. Considere o problema de otimização

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y),$$

onde a função objetivo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy^2 - 12x + y^4 + 2y^2 + 36.$$

- (a) Calcule todos os pontos estacionários (críticos) de f e determine quais são os mínimos locais e qual(is) o(s) mínimo(s) global(is).
- (b) Partindo do ponto inicial $x^{(0)} = (1, 2)$, efetue um passo do método de Newton com *backtracking* (critério de Armijo). Use como passo inicial $\alpha_0 = 1$.

Questão 4. Seja A uma matriz simétrica definida positiva e considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \|Ax\|^2/2$ na norma euclidiana.

- a) Mostre que existe um ponto de mínimo de f sobre a esfera de raio 1.
- b) Mostre ainda, com base em Condições de Qualificação, que qualquer solução deve ser ponto KKT do respectivo problema.
- c) Relacione as soluções do problema aos autovetores de A e determine o valor máximo de f sobre a esfera.

Questão 5. Uma empresa opera patinetes elétricos em três bairros: Satélite, Parque e Centro. Os patinetes podem ser retirados num bairro e devolvidos em outro. As frações médias de patinetes devolvidos em cada bairro diariamente são dadas pela tabela.

		Fim do dia		
		Satélite	Parque	Centro
Início do dia	Satélite	1/4	7/12	1/6
	Parque	7/12	1/4	1/6
	Centro	1/6	1/6	2/3

No início do dia 1 havia S_0 patinetes no Satélite, P_0 patinetes no Parque e C_0 patinetes no Centro. Supondo que as médias são mantidas constantes, expresse as quantidades S_n , P_n e C_n de patinetes no Satélite, Parque e Centro, respectivamente, ao final do dia n em função de S_0 , P_0 , C_0 e n .

Questão 6. Decida se cada afirmação é VERDADEIRA ou FALSA e apresente a justificativa.

- Se A e B são matrizes reais de ordem n , $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de A e $\mu \in \mathbb{R}$ é autovalor de B , então $\mu\lambda$ é autovalor de AB .
- Se W é o espaço das matrizes de ordem n sobre o corpo F , $A \in W$ é diagonalizável sobre F e $U : W \rightarrow W$ é definido por $U(X) = AX - XA$, então U é diagonalizável.
- Se A é matriz real de ordem $m \times n$ com colunas linearmente independentes, então o posto de $A^T A$ é igual ao posto de A .
- Se T é operador linear diagonalizável sobre V espaço vetorial real com produto interno, de dimensão finita, então existe uma base ortonormal de autovetores de T .
- Se T é operador linear sobre V espaço vetorial real, de dimensão finita, e todo $v \in V$ não nulo é autovetor de T , então T é um múltiplo do operador identidade em V .

Questão 7. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ um número positivo. Considere a função de Rosenbrock

$$f(x_1, x_2) = \varepsilon(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_2)^2.$$

Encontre e classifique os pontos estacionários de f .

