CONCURSO ITA 2025

EDITAL: 02/ITA/2025
CARGO: PESQUISADOR

PERFIL: PQ-14

CADERNO DE QUESTÕES

1. Esta prova tem duração de **4 (quatro) horas**.
2. Você poderá usar **apenas** caneta esferográfica de corpo transparente com tinta preta, lápis ou lapiseira, borracha, régua transparente simples e compasso. **É proibido portar qualquer outro material escolar ou equipamento eletrônico**.
3. Você recebeu este **caderno de questões e um caderno de respostas** que deverão ser devolvidos ao final do exame.
4. O caderno de questões é composto por 4 **questões dissertativas**.
5. As **questões dissertativas devem ser respondidas exclusivamente no caderno de respostas**. Responda sequencialmente as questões, usando caneta preta.
6. **É obrigatória a devolução do caderno de questões e do caderno de respostas**, sob pena de desclassificação do candidato.
7. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar**.

Questão 1. (2,5 pontos) Considere o sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu y - x + x^3, \end{cases}$$

com $x, y, \mu \in \mathbb{R}$ e $|\mu| < 2$. Para $\mu = 0$ o sistema é hamiltoniano.

a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema e classifique-os (nó, sela, foco, etc.) em função do parâmetro μ.

b) Faça um esboço do retrato de fase do sistema para $\mu = 0$. Discuta a existência de ciclos limites e explique o tipo de bifurcação que ocorre no sistema com a variação do parâmetro μ.

Questão 2. (2,5 pontos) Considere o sistema de EDOs no toro bidimensional $\mathbb{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, dado pelas seguintes equações diferenciais em relação às coordenadas angulares padrão (θ_1, θ_2),

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 \qquad \dot{\theta}_2 = \omega_2 \tag{1}$$

Os ângulos θ_1 e θ_2 são expressos em número de voltas e podem representar o ângulo poloidal e toroidal no toro. Alternativamente, pode-se representar o toro bidimensional como $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Isto é, o quadrado unitário $\mathbf{I}^2 = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ com os pares de lados opostos identificados: $(x, 0) \sim (x, 1)$ e $(0, y) \sim (1, y)$. A correspondência entre esta representação e a definição original de $\mathbb{T}^2$ é dada da seguinte forma: consideremos o círculo como conjunto $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}\}$, com a multiplicação complexa como a operação de grupo. Então as duas notações são relacionadas por $[x] \mapsto e^{2\pi i\alpha}$, que é um isomorfismo de grupos se dividirmos o comprimento do arco no círculo multiplicativo por 2π.

a) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, seja R_α a rotação de S^1 pelo ângulo $2\pi\alpha$, ou seja,

$$R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z$$

ou seja, na notação "aditiva",

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \mod 1$$

é uma translação da reta. Aqui a expressão $a = b \mod 1$ significa que a diferença $a - b \in \mathbb{Z}$.

Mostre que o fluxo do sistema (1) pode ser explicitamente escrito como

$$\Phi_t(\theta_1, \theta_2) = (R_{t\omega_1}(\theta_1), R_{t\omega_2}(\theta_2))$$

Conclua que as curvas integrais do sistema (1) são segmentos de retas com inclinação $\alpha = \omega_1/\omega_2$ no plano xy, fazendo-se a identificação $x = \theta_2 \mod 1$ e $y = \theta_1 \mod 1$ e re-escalonando o tempo como $t' = t/\omega_2$.

(b) O círculo $C_1 = \{x = 0\}$ define uma seção global do fluxo Φ_t. Mostre que aplicação de retorno de Poincaré sobre C_1 é a rotação R_α, com $\alpha = \omega_1/\omega_2$.

(c) Mostre que se $\alpha = \omega_1/\omega_2$ é racional, então toda órbita do sistema (1) é periódica e mostre também que se $\alpha = \omega_1/\omega_2$ é irracional — o que define órbitas quase-periódicas — então toda órbita do sistema (1) é densa em $\mathbb{T}^2$.

Questão 3. (2,5 pontos)

Sejam $f : I \to I$ e $g : J \to J$ duas funções diferenciáveis, que descrevem sistemas dinâmicos na forma recursiva $x_{k+1} = f(x_k)$ e $y_{k+1} = g(y_k)$, com condições iniciais x_0 e y_0, onde $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ são intervalos reais, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$.

a) Prove que, se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^1$ que conjuga f com g, ou seja, satisfaz $h \circ f = g \circ h$ ou, de modo equivalente, $h(f(x)) = g(h(x))\ \forall\ x$ nos domínios correspondentes, e $x_0 \in I$ é um ponto no domínio de f para o qual o expoente de Lyapunov ($\lambda_f(x_0)$) existe, então o expoente de Lyapunov de g em $y_0 = h(x_0)$, denotado por $\lambda_g(y_0)$, também existe e é igual a $\lambda_f(x_0)$. Em outras palavras, vale

$$\lambda_g(h(x_0)) = \lambda_f(x_0)\ .$$

b) Considere as funções $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x$. Mostre que f e g são conjugadas pelo difeomorfismo $h(x) = \ln x$ mas que, para todo $x_0 \neq 1$, os expoentes de Lyapunov satisfazem:

$$\lambda_g(h(x_0)) \neq \lambda_f(x_0)\ .$$

c) Considerando as propriedades da função de conjugação, explique por que o resultado do item (b) não contradiz o que foi estabelecido no item (a).

Questão 4. (2,5 pontos)

Os sistemas dinâmicos caóticos dissipativos caracterizam-se pela sensibilidade às condições iniciais, pela presença de bifurcações e formação de atratores estranhos. São exemplos os sistemas de *Lorenz*, *Henon*, *Rössler*, entre outros. Uma ferramenta central na caracterização da dinâmica desses sistemas é o *Espectro de Expoentes de Lyapunov* (EEL) $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, que além de quantificar a taxa média de separação exponencial de trajetórias vizinhas no espaço de fases, também é capaz de caracterizar se a dinâmica é dissipativa. Outra ferramenta importante, relacionada aos expoentes de Lyapunov, é a *Conjectura de Kaplan–Yorke (CKY)*, que estabelece uma possível relação matemática entre o EEL e a dimensão fractal do atrator, conectando a evolução temporal do sistema à sua geometria e estabilidade no espaço de fases.

Com base nestes conceitos, responda os itens a seguir.

a) Como os valores dos expoentes de Lyapunov caracterizam as propriedades de sensibilidade e dissipação de um modelo matemático caótico?

b) Descreva como a Conjectura de Kaplan–Yorke relaciona a dimensão de um atrator estranho com os expoentes de Lyapunov.

c) Forneça exemplos e descrição de dois modelos caóticos discretos (mapeamento) e de dois modelos contínuos dissipativos, indicando — quando houver — suas aplicações no mundo real.

d) O que significa, no contexto do espaço de fases, o conceito de multiestabilidade caótica?